**Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Санкт-Петербургское отделение
Математического института им. В.А. Стеклова
Российской академии наук
(ПОМИ РАН)**

191023 Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, 27
тел. (812) 312-40-58, факс (812) 310-53-77
e-mail: admin@pdmi.ras.ru

29.08.2014 № 11102/33/02-2171

На ____________ от _____________

"УТВЕРЖДАЮ"
Директор ФГБУН Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В.А. Стеклова Российской академии наук
член-корреспондент РАН
С.В. Кисляков

ОТЗЫВ ВЕДУЩЕЙ ОРГАНИЗАЦИИ

о диссертации Е.Г. Родиковой "*Факторизация, характеризация корневых множеств и вопросы интерполяции в весовых пространствах аналитических функций*", представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – "вещественный, комплексный и функциональный анализ"

Факторизационные теоремы играют важную роль в теории функций комплексной переменной. Отметим, что они тесно связаны с описанием множества нулей функций, принадлежащих фиксированному функциональнальному пространству. Факторизационные теоремы играют также важную роль при описании инвариантных подпространств оператора сдвига.

Одной из первых факторизационных теорем является классическая теорема Вейерштрасса о разложении целой функции в бесконечное произведение.

Первое существенное продвижение в теории факторизации функций, аналитических в единичном круге (а значит, и в полуплоскости), связано с именами Р. Неванлинны и В.И. Смирнова. Благодаря их усилиям задача о факторизации получила в известном смысле окончательное решение не только для класса Неванлинны N и класса Смирнова N_+, $N_+ \subset N$, но и для целого ряда пространств аналитических фунций, содержащихся в N, в частности, для классов Харди H^p $(0 < p \leq +\infty)$.

Рассмотрение пространств аналитических фунгций X таких, что $X \not\subset N$, требует существенно новых методов. В частности, особый интерес представляет случай, когда пространство X является пространством С. Бергмана. Важные результаты в этом направлении были получены М.М. Джрбашяном.

В настоящее время теория факторизации в различных пространствах аналитических привлекает внимание специалистов и бурно развивается. Таким образом, тема диссертации весьма актуальна.

Прежде, чем перейти к более детальному обзору результатов диссертации, введём некоторые обозначения и опишем в двух словах некоторые пространства аналитических функций, постоянно используемые в диссертации.

Пусть $T(r, f)$ обозначает характеристику Неванлинны функции $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$, где $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ обозначает пространство всех функций, аналитических в единичном круге $\mathbb{D}$.

Пусть S_α^p обозначает множество всех функций $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ таких, что функция $T(r, f)$ принадлежит пространству L^p с весом $(1-r)^\alpha$. Положим $S_\alpha = S_\alpha^1$.

М.М. Джрбашяном была введена α-характеристика $T_\alpha(r, f)$. Пусть $N_{\alpha,\gamma}^p$ обозначает множество всех функций $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ таких, что функция $T_\alpha(r, f)$ принадлежит пространству L^p с весом $(1-r)^\gamma$.

Если в определении класса Неванлинны N вместо характеристики $T(r, f)$ (т. е. L^1-нормы функции $\log^+ |f(r\zeta))$ рассмотреть L^p-норму этой функции, то получится определение класса И.И. Привалова Π_p.

Перейдём теперь к описанию результатов диссертации. Диссертация состоит из введения и двух глав.

В первой главе диссертации получено полное описание нулей функций класса $N_{\alpha,\gamma}^p$ (теорема 1.1). Одним из центральных результатов не только первой главы, но и всей диссертации является Теорема 1.2. Эта теорема даёт факторизационное описание пространства $N_{\alpha,\gamma}^p$. Решение этой факторизационной задачи зависит от параметра $\beta > \alpha+1+\frac{\gamma+1}{p}$. Таким образом, можно сказать, что задача о факторизации функций класса $N_{\alpha,\gamma}^p$ решена бесконечным числом способов.

В первой главе получены также в некотором смысле окончательные результаты о нулях функций класса Привалова Π_p. Естественно речь идёт о случае $0 < p < 1$, поскольку $\Pi_p \subset N$ при $p \geq 1$ и всё определяется условием Бляшке. Дано полное описание функций $\eta : (0, 1] \to (0, +\infty)$, удовлетворяющих минимальным условиям регулярности, таких, что $\sum_k \eta(1 - |z_k|) < +\infty$ для семейства корней $\{z_k\}$ любой ненулевой функции класса Π_p. Этот результат усиливает известное ранее необходимое условие для корней функции класса Π_p, где $p \in (0, 1)$.

Две теоремы первой главы посвящены также исследованию нулей функций из пространства $H_\varphi(E)$, где φ – достаточно "хорошая" функция, а E – конечное подмножество единичной окружности. Пространство $H_\varphi(E)$ состоит из всех функций $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ таких, что $\log |f| = O(\varphi(\operatorname{dist}(z, E)^{-1}))$ при $\operatorname{dist}(z, E) \to 0$. Результаты диссертации, относящиеся к пространствам $H_\varphi(E)$, существенно дополняют результаты, полученные в последние годы целым рядом математиков.

В известном смысле окончательными результатами являются теоремы 1.8 и 1.9. В этих теоремах речь идёт о пространстве функций, аналитических в верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$, с мажорантой бесконечного порядка. Теорема 1.8 даёт описание нулей для таких функциональных пространств, а теорема 1.9 – это факторизационная теорема. Следует отметить, что предшествующие результаты в этом направлении для функциональных пространств такого типа не носили окончательный характер, поскольку в этих результатах не гарантировалось, что все сомножители факторизации попадают в то же самое функционоальное пространство, а в теореме 1.9 это гарантируется.

В последнем пятом параграфе первой главы речь идёт о функциональном пространстве $X(\lambda)$, состоящем из аналитических в полуплоскости $\{\operatorname{Re} z > 0\}$ функций f таких, что $\sup_{y\in\mathbb{R}} \log^+ |f(x+iy)| = O(\lambda(x))$. Для таких функциональных пространств при определённых условиях на весовую функцию λ дано описание нулей, лежащих на луче положительных чисел.

Перейдём теперь к краткому описанию результатов второй главы диссертации. В начале второй главы диссертации речь идёт о свободной интерполяции в пространстве S^∞_α, состоящим из всех функций $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ таких, что $T(r, f) = O((1-r)^{-\alpha})$. Получено описание всех множеств Λ, содержащихся в конечном объединении углов Штольца с раствором меньше, чем $(\alpha+1)^{-1}$, на которых возможна свободная интерполяция функциями класса S^∞_α.

Далее во второй главе рассматриваются теоремы вложения для пространства S^p_ω, состоящего из всех функций $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ таких, что $T(r, f)$ принадлежит пространству L^p с весом $\omega(1-r)$, где ω – положительная функция, удовлетворяющая некоторым условиям регулярности. Получено необходимое и достаточное условие для того, чтобы $\log^+|f| \in L^p(\mu)$ для любой функции $f \in S^p_\omega$ (с соответствующей оценкой L^p-нормы функции $\log^+|f|$), где μ – мера в единичном круге $\mathbb{D}$. Следует отметить, что это условие зависит от $p \in (0, +\infty)$ в отличие от известного условия вложения класса Бергмана A^p в пространство $L^p(\mu)$.

Пусть $M(r, f)$ обозначает наибольшее значение функции $|f|$ на окружности $\{|z| = r\}$, где $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$. Во второй главе рассматривается также следующий вопрос.

Как быстро функция $M(r, f)$ может стремиться к бесконечности при $r \to 1$, где $f \in S^p_\alpha$?

Получен в известном смысле окончательный ответ на этот вопрос. Это позволило получить в некотором смысле неулучшаемые оценки для модулей коэффициентов степенного разложения функций класса S^p_α.

Последние результаты привели в свою очередь для широкого класса пространств $X \subset \mathcal{H}(\mathbb{D})$ к полному описанию пространств мультипликаторов (по степенному разложению), действующих из пространства S^p_α в пространство X.

Диссертация содержит целый ряд красивых и глубоких результатов. Некоторые результаты диссертации улучшают и дополняют известные ранее результаты. В диссертации есть также результаты, которые носят окончательный характер. Доказательства большей части результатов диссертации технически очень сложны. Автору диссертации пришлось преодолеть огромное число трудностей, чтобы получить эти результаты.

К сожалению, уровень изложения временами существенно отстаёт от уровня результатов. Обозначения не всегда хорошо продуманы, довольно часто встречаются неточности и неаккуратности. Здесь мы приведём только заведомо неполный список неточностей и опечаток.

1. Стр. 5, перед формулой (0.2). Видимо, должно быть $\alpha > -1$ вместо $\alpha > -2$.

2. Стр. 6, 8-ая строка сверху. Написано: “Пусть E – конечное множество...”. Далее чуть ниже при рассмотрении примеров рассматривается случай, когда $E = \mathbb{T}$. Это же замечание относится и к стр. 34.

3. Стр. 11, 2-ая строка снизу. Определение константы k_α приведено с опечаткой, на самом деле $k_\alpha = \alpha \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+\alpha)}$, а $\alpha \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \alpha$.

4. Стр. 22, строка после формулы (1.7). Написано
$n(r) = \{card\ z_k : |z_k| < r\}, k = 1, 2, ...$
вместо
$n(r) = \mathrm{card}\{k : |z_k| < r\}$.
Аналогичная неаккуратность встречается в формуле (1.69) на стр. 65, в трёх выносных формулах на стр. 68 и в формуле (2.3) на стр. 71.

5. Стр. 30, 2-ая строка перед второй выносной формулой.
Написано: "... тогда, когда $\frac{1}{\pi_\beta(z,z_k)} \in N^p_{\alpha,\gamma}$".
Это не так, поскольку функция $\frac{1}{\pi_\beta(z,z_k)}$ не является аналитической в круге $\mathbb{D}$ и поэтому не может принадлежать пространству $N^p_{\alpha,\gamma}$.

6. Стр. 34, строка перед формулой (1.22). Написано, что $\varphi \in C^{(1)}(1, +\infty)$. Строго говоря, функция φ должна быть задана на промежутке $(\frac{1}{2}, +\infty)$, чтобы выражение $\varphi((\mathrm{dist}(z, E))^{-1})$ (см. определение пространства $H_\varphi(E)$ на этой же странице) было определено при всех $z \in \mathbb{D}$ и всех конечных множеств $E \subset \mathbb{T}$.

7. Стр. 40, 6-ая строка сверху. Видимо, должно быть $f \in H_\varphi(E)$ вместо $f \in H^*_\varphi$.

8. Стр. 43. В начале доказательства теоремы 1.5 написано, что можно считать, что $\tau_0 = 0$. Но дальше это замечание не используется.

9. Стр. 51, равенство после формулы (1.50). Это равенство верно, но доказательство его непонятно, поскольку пределы в последней выносной формуле на стр. 51 могут не существовать.

10. Стр. 54, формулировка теоремы 1.8. Видимо, вместо
$\forall\ 0 < R < 1$ должно быть $\forall\ R > 1$.

11. Стр. 70, последняя строка. Написано:"...весовых последовательностей...". Здесь с некоторой натяжкой весовыми можно назвать пространства l_α, но никак не последовательности, из которых они состоят.

12. Стр. 71, определение 2.2. Очень странное определение угла Штольца. Если таким образом определить угол Штольца $\Gamma_\delta(\theta)$, то его замыкание будем содержать не только точку $e^{i\theta}$ на окружности $\mathbb{T}$, но и целую дугу с центром в точке $e^{i(\theta+\pi)}$ и длины $2\pi\delta$. Тогда круг покрывался бы конечным числом таких "углов Штольца", и условие (2.2) теоремы 2.1 превратилось бы в условие $\{\alpha_k\} \subset \mathbb{D}$.

13. Стр. 95, лемма 2.4. Надо ли было формулировать в виде отдельной леммы неравенство Минковского, которое на современном языке по существу означает, что пространство L^p является нормированным при $p \geq 1$?
Не говоря уже о том, что неравенство (2.43) должно быть нестрогим.

14. Стр. 95, неравенство (2.45). В левой части этого неравенства встречается выражение $(R - r)^p$, которое непонятно, что означает, если $0 < R < r < 1$. С другой стороны, неравенство, "выведенное" из неравенства (2.45), не вызывает сомнений.

15. Стр. 99, определение 2.3 и теорема 2.6. Должно быть $\{\lambda_k\}_{k=0}^{+\infty}$ вместо $\{\lambda_k\}_{k=1}^{+\infty}$.

Все эти замечания не могут повлиять на общий достаточно высокий уровень работы.

Полученные в диссертации результаты заслуживают высокой оценки. Все основные результаты диссертации приведены с полными доказательствами.

Результаты и методы диссертации могут оказаться полезными и в других разделах анализа. Диссертация имеет теоретическое значение. Работа посвящена актуальной теме.

С результатами диссертации рекомендуется ознакомиться специалистам в Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН, в Московском государственном университете, в Институте математики с вычислительным центром Уфимского научного центра РАН, в Башкирском государственном университете и в Институте математики им. С.Л. Соболева СО РАН.

Основные результаты диссертации опубликованы в журналах, рекомендованных ВАК для публикации. Автореферат диссертации верно и полно отражает её содержание.

Диссертационная работа Е.Г. Родиковой “Факторизация, характеризация корневых множеств и вопросы интерполяции в весовых пространствах аналитических функций” является законченным научным исследованием, в котором автором получены важные результаты. Диссертация удовлетворяет всем требованиям ВАК, предъявляемым к диссертациям на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – “вещественный, комплексный и функциональный анализ”, а её автор, Е.Г. Родикова, заслуживает присуждения ей этой степени.

Отзыв обсужден и одобрен на заседании лаборатории математического анализа ПОМИ, протокол № 7 от 25 августа 2014 года.

И. о. зав. Лабораторией
математического анализа ПОМИ
член-корреспондент РАН
доктор физ.-мат. наук — Кисляков — С.В. Кисляков

Ведущий научный сотрудник ПОМИ
доктор физ.-мат. наук — Алексан — А.Б. Александров

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова Российской академии наук

Подпись руки С.В. Кислякова
А.Б. Александрова
УДОСТОВЕРЯЮ
Помощник директора
ПОМИ РАН ________ А.Н. Антонова
"29" августа 2014 г.